③

Unit - II

Topics:-

→ Rigid Body motion.

→ Rotational motion.

→ Moments of Inertia and their products

→ Principal moments and axes.

→ Introductory idea of Euler's equations.

→ Potential well and ~~Osci~~ Periodic oscillations.

→ Case of harmonic small oscillations.

→ Differential equation and its solution.

→ Kinetic and potential energy, ~~Exa~~

→ Examples of Simple harmotion oscillations.

→ Spring and mass System.

→ Simple and Compound pendulum.

→ Torsional pendulum.

Rigid Body motion

यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल आरोपित करने पर उसके कणों में परस्पर एक-दूसरे के सापेक्ष कोई विस्थापन न हो तो ऐसे पिण्ड को दृढ़ पिण्ड (rigid body) कहते हैं। पिण्ड की निम्नलिखित दो प्रकार की गतियाँ होती हैं:-

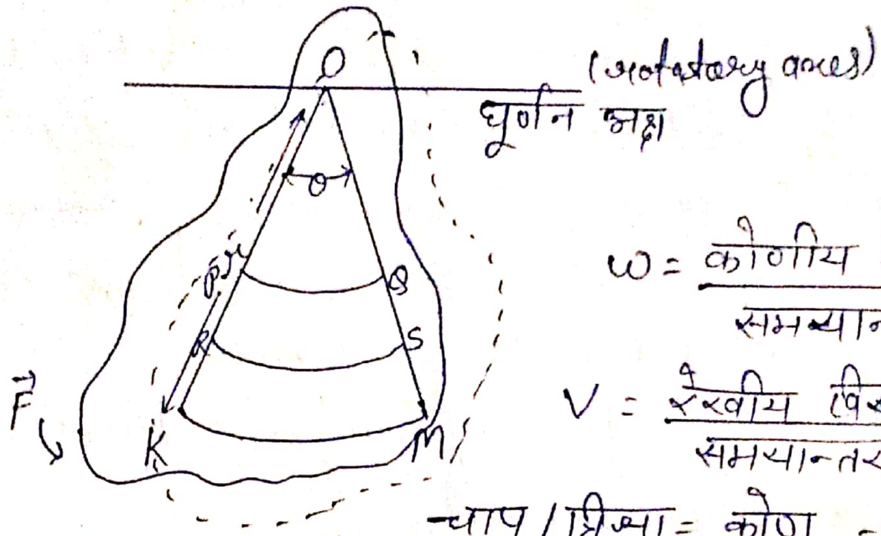
(i) स्थानान्तरीय गति (Translational motion):- पिण्ड सरल रेखा में गति करता है।

(ii) घूर्णन गति (Rotatory motion):- जब कोई दृढ़ पिण्ड किसी स्थिर अक्ष पर इस प्रकार टिका दिया जाता है कि पिण्ड उस अक्ष के चारों ओर स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सके तो उस पिण्ड पर बाह्य बल लगाने से वह बल के आघूर्ण के कारण घूमना प्रारम्भ कर देता है। पिण्ड की इस गति को घूर्णन गति (rotatory motion) कहते हैं।

तथा जिस अक्ष के परित: पिण्ड घूमता है, उस अक्ष घूर्णन अक्ष (rotatory axes) कहते हैं।

Example: (i) लट्टू का नाचना। (ii) बिजली के पंखे के घूमते ब्लेड।

घूर्णन गति में पिण्ड के किसी भी कण द्वारा एकांक समय में घुमा गया कोण उस पिण्ड का कोणीय वेग (Angular velocity (ω)) कहलाता है।



$\omega = \frac{\text{कोणीय विस्थापन}}{\text{समयान्तर}} = \frac{\theta}{t}$ —(1)

$V = \frac{\text{रैखीय विस्थापन}}{\text{समयान्तर}} = \frac{KM}{t}$ —(2)

चाप / त्रिज्या = कोण $\Rightarrow \frac{KM}{r} = \theta$

$KM = r\theta$

समी॰ (2) में मान रखने पर :- $V = \frac{r\theta}{t}$

पुनः समी॰ (1) से :- $\boxed{V = r \times \omega}$

कोणीय त्वरण :- $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \Rightarrow \alpha = \frac{\left(\frac{V_2}{r} - \frac{V_1}{r}\right)}{t}$

$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{V_2 - V_1}{t}\right) \times \frac{1}{r} = \frac{a}{r}$ $\left[\because a = \frac{dv}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{t}\right]$

$\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow \boxed{a = \alpha r}$ [∵ where r is radius]

Scanned with CamScanner

Angular momentum: $\boxed{\vec{L} = I\omega}$

→ Moments of Inertia and their products

प्रत्येक वस्तु में एक ऐसा मौलिक गुण होता है जिसके कारण वह अपनी विराम (rest state/position) अवस्था अथवा एकसमान गति की (uniform motion) अवस्था में परिवर्तन का विरोध करती है। वस्तु के इस गुण को जड़त्व (Inertia) कहते हैं।

$$\boxed{I = mr^2} \quad \text{--- (1)}$$

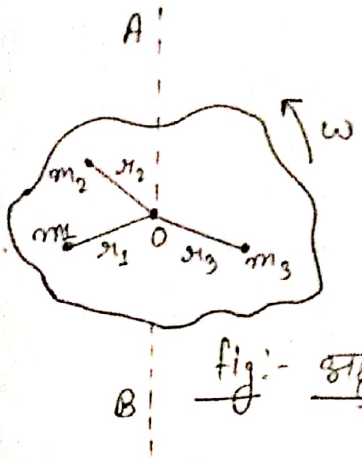


fig:- अक्ष AB के परितः घूमता पिण्ड

Moment of Inertial for first particle $I_1 = m_1 r_1^2$

Moment of Inertial for second particle $I_2 = m_2 r_2^2$

Moment of Inertia for third particle $I_3 = m_3 r_3^2$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

$$\boxed{I = \Sigma m r^2}$$

Radius of Gyration → $K = \sqrt{\dfrac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}{n}}$, $K = \sqrt{\dfrac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}}$

→ Principal moments of Inertia and Principal Axes

किसी पिण्ड का उसके किसी बिन्दु के परितः कोणीय संवेग

$$\vec{L} = \Sigma m \left[R^2 \omega - (\vec{R} \cdot \vec{\omega}) \vec{R} \right] \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\hat{i} L_x + \hat{j} L_y + \hat{k} L_z = I(\hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z)$$

$L_x = I\omega_x$, $L_y = I\omega_y$, $L_z = I\omega_z$

कोणीय वेग $\vec{\omega}$ के अवयव क्रमशः ω_1, ω_2 व ω_3 हों तो :-

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_1 + \hat{j}\omega_2 + \hat{k}\omega_3$$

तथा कोणीय संवेग $\boxed{L_{\text{या } J} = \hat{i}I_1\omega_1 + \hat{j}I_2\omega_2 + \hat{k}I_3\omega_3}$

→ Introductory idea of Euler's Equations :-

माना एक दृढ़ पिण्ड है, जो कि बल आघूर्ण τ के कारण घूर्णन गति कर रहा है जिसका कोणीय वेग ω और कोणीय संवेग J है, तो τ, ω और J में निम्न संबंध होंगे :-

$$\tau = \frac{dJ}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{J} \quad \text{—} (1)$$

हम जानते हैं $J = I\omega$

यदि पिण्ड का मुख्य जड़त्व आघूर्ण I_1, I_2 व I_3 है तो

$$\vec{J} = \vec{I_1}\vec{\omega_1}\hat{i} + \vec{I_2}\vec{\omega_2}\hat{j} + \vec{I_3}\vec{\omega_3}\hat{k} \quad \text{—} (2)$$

[जहाँ $P = mv$
$J = I\omega$]

समी॰ (2) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर :-

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{I_1}\frac{d\vec{\omega_1}}{dt}\hat{i} + I_2\frac{d\vec{\omega_2}}{dt}\hat{j} + I_3\frac{d\vec{\omega_3}}{dt}\hat{k} \quad \text{—} (3)$$

समी॰ (1) में समी॰ (3) से $\frac{dJ}{dt}$ का मान रखने पर तथा ω एवं I का compound रखने पर :-

$$\tau = \left(\vec{I_1}\frac{d\vec{\omega_1}}{dt}\hat{i} + \vec{I_2}\frac{d\vec{\omega_2}}{dt}\hat{j} + \vec{I_3}\frac{d\vec{\omega_3}}{dt}\hat{k}\right) + (\vec{\omega_1}\hat{i} + \vec{\omega_2}\hat{j} + \vec{\omega_3}\hat{k} \times \vec{I_1}\vec{\omega_1}\hat{i} + \vec{I_2}\vec{\omega_2}\hat{j} + \vec{I_3}\vec{\omega_3}\hat{k}) \quad \text{—} (4)$$

बल आघूर्ण τ को घटकों के रूप में बदलने पर :-

$$\tau = \tau_1\hat{i} + \tau_2\hat{j} + \tau_3\hat{k} \quad \text{—} (5)$$

(5)

समी० (1) से matrix के रूप में solve करने पर।

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\{\vec{\omega}_2(\vec{I}_3\vec{\omega}_3) - \vec{\omega}_3(\vec{I}_2\vec{\omega}_2)\} + \hat{j}\{\vec{\omega}_3(\vec{I}_1\vec{\omega}_1) - \omega_1 (\vec{I}_3\vec{\omega}_3)\} + \hat{k}\{\vec{\omega}_1(\vec{I}_2\vec{\omega}_2) - \vec{\omega}_2(\vec{I}_1\vec{\omega}_1)\}$$

$$= \hat{i}(\vec{\omega}_2\vec{I}_3\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_3\vec{I}_2\vec{\omega}_2) + \hat{j}(\vec{\omega}_3\vec{I}_1\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_1\vec{I}_3\vec{\omega}_3) + \hat{k}(\vec{\omega}_1\vec{I}_2\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_2\vec{I}_1\vec{\omega}_1)$$

$$= \hat{i}\{\vec{\omega}_2\vec{\omega}_3(\vec{I}_3 - \vec{I}_2)\} + \hat{j}\{\vec{\omega}_1\omega_3(\vec{I}_1 - \vec{I}_3)\} + \hat{k}\{\vec{\omega}_1\vec{\omega}_2(\vec{I}_2 - \vec{I}_1)\} \quad \text{—(6)}$$

समी० (4) में समी० (6) से मान रखने पर:-

$$\tau = \left(\vec{I}_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\hat{i} + \vec{I}_2\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\hat{j} + \vec{I}_3\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\hat{k}\right) + \{\hat{i}(\vec{I}_3 - \vec{I}_2)\vec{\omega}_2\vec{\omega}_3 + \hat{j}(\vec{I}_1 - \vec{I}_3)\vec{\omega}_1\vec{\omega}_3 + \hat{k}(\vec{I}_2 - \vec{I}_1)\vec{\omega}_1\vec{\omega}_2\} \quad \text{—(7)}$$

समी० (5) और समी० (7) से $\hat{i}, \hat{j}$ व $\hat{k}$ की पदों की तुलना करने पर:-

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \vec{I}_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + (\vec{I}_3 - \vec{I}_2)\vec{\omega}_2\vec{\omega}_3 \\ \tau_2 &= \vec{I}_2\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + (\vec{I}_1 - \vec{I}_3)\vec{\omega}_1\vec{\omega}_3 \\ \tau_3 &= \vec{I}_3\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} + (\vec{I}_2 - \vec{I}_1)\vec{\omega}_1\vec{\omega}_2 \end{aligned}\right\} \text{—(8)}$$

(अतः समी० (8) को ही Euler's equation कहते हैं।)

(It is known as Euler's Equation)

Scanned with CamScanner

→ Potential well and Periodic Oscillations:-

(विभव कूप तथा आवर्ती दोलन)

- ऋणात्मक प्रवणता = बल ⇒ $\vec{F} = -\text{grad}\, U = -(\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z})$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

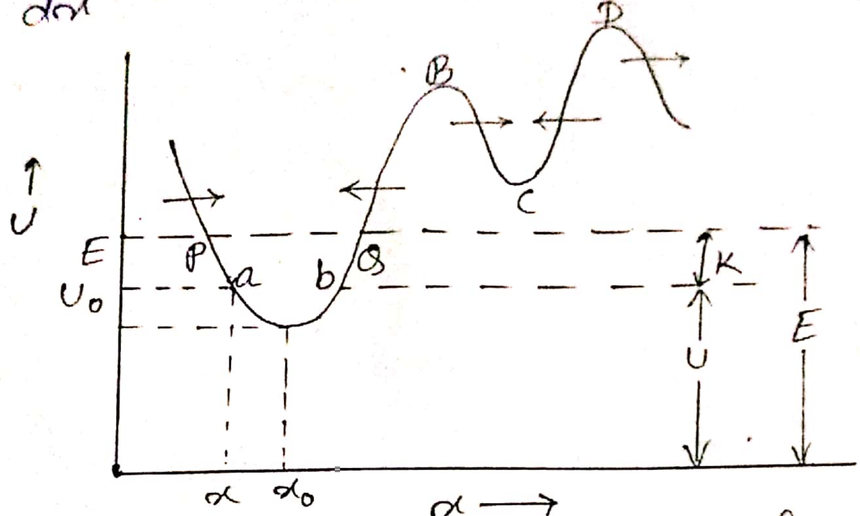


fig:- संरक्षी बल क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा वक्र

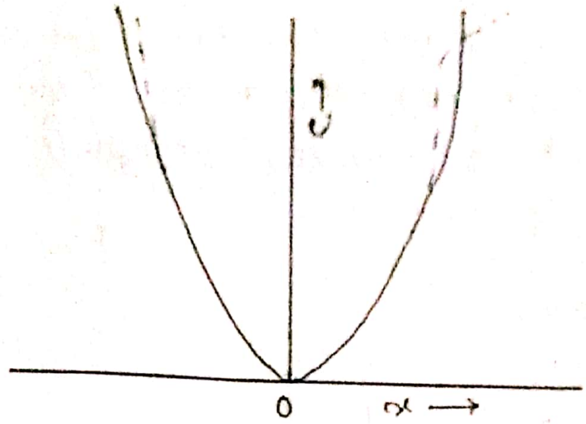
एक संरक्षी बल क्षेत्र में किसी कण की स्थितिज ऊर्जा U का दूरी x के साथ परिवर्तन एक वक्र द्वारा प्रदर्शित है जिसे स्थितिज ऊर्जा-दूरी वक्र या केवल स्थितिज ऊर्जा वक्र (potential energy curve) कहते हैं।

कण एक निश्चित आवर्तकाल T से बिन्दु T से बिंदु A के दोनों ओर P व Q स्थितियों के बीच दोलन करता है। बिन्दु P तथा बिन्दु Q के बीच घिरे स्थितिज ऊर्जा वक्र को विभव कूप (potential well) कहते हैं क्योंकि यह वह बद्ध क्षेत्र (bounded region) प्रदर्शित करता है जिसमें कण अपनी स्थायी संतुलन की स्थिति A के दोनों ओर कुल ऊर्जा E से दोलन करता है। इस प्रकार, विभव कूप के अंतर्गत कण आवर्ती दोलन करता है।

→ Case of harmonic small oscillations :-

(स्थितिज ऊर्जा) Potential energy $U = \frac{1}{2}kx^2$

तथा कण पर (प्रत्यानयन बल) Restoring force $F = -kx$ } —①



चित्र :- परवलयाकार विभव कूप

इस स्थिति में, स्थितिज ऊर्जा U तथा विस्थापन x के बीच खींचा गया ग्राफ चित्र की भाँति एक परवलय होता है, अर्थात विभव कूप परवलयाकार होता है।

→ Differential equation and its Solution :-

Restoring force ∝ displacement

$\boxed{F = ma}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

Or $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

$$\text{acceration} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-Kx}{m} \quad \text{— ①}$$

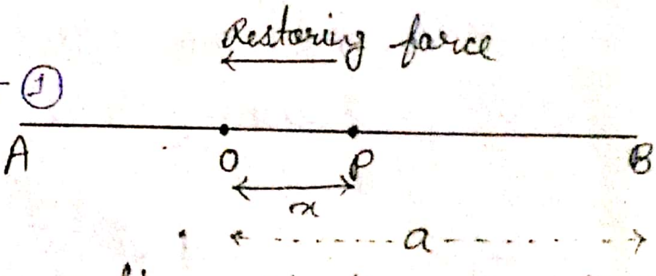


fig :- Didrection of Restoring force

Let $\frac{K}{m} = \omega^2$

eq. ① में मान रखने पर :-

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Or $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \text{— ②}$$

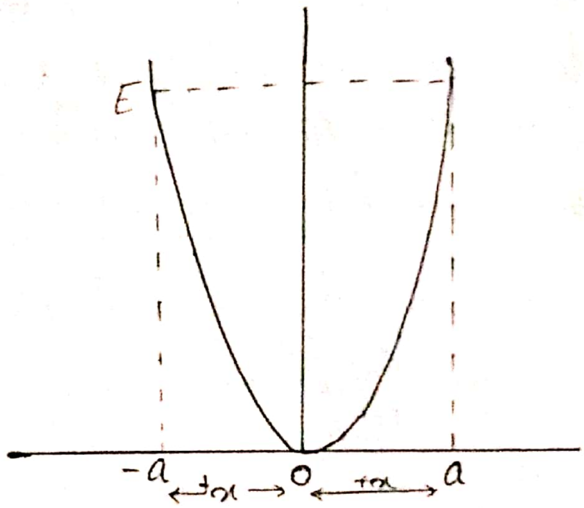
This eq. ① is known as Simple Harmonic Motion.

~~समी० (2) में~~ → सरल आवर्ती दोलित्र
(Simple Harmonic Oscillator)

सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion) :- वह आवर्त गति जिसमें किसी भी समय पर पिण्ड पर कार्य करने वाला प्रत्यानयन बल पिण्ड को उसके मार्ग के एक बिन्दु तक किये गये विस्थापन (displacement) के (directly) समानुपाती होता है, सरल आवर्त गति कहलाता है।

$F \propto -x$

Ex :- (1) लोलक।
(2) स्प्रिंग।
(3) L-C परिपथ।
(4) लटकती हुई चुम्बक।



माना कि किसी कण (पिण्ड) को x दूरी पर विस्थापित करके छोड़ने पर Restoring force के कारण सरल आवर्त गति उत्पन्न होगा :-

कणत्वरण $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

अब सरल आवर्त गति की परिभाषा से -

Restoring force $\propto$ - displacement — (1)

$F = ma$

$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

(6) समी. (1) में F का मान रखने पर :-

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{cx}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \left[\because \frac{c}{m} = \omega^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \text{--- (3)}$$ Simple Harmonic Motion

पुन: समी. (2) से :-

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$$

$$\Rightarrow F = -cx$$

$\because$ माना कि $m = c$ और $V = x$

किसी क्षण दोलन कर रहे कण की स्थितिज ऊर्जा :-

$$U = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}cx^2} \quad \text{--- (4)}$$

समी. (3) में $2\frac{dx}{dt}$ से गुणा करने पर :-

$$\Rightarrow 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 2\frac{dx^2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2\frac{dx^2}{dt}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2\frac{dx^2}{dt} = 0$$

समाकलन करने पर:-

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + \int \frac{d}{dt} \omega^2 x^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = A \text{ — } (5)$$

यदि विस्थापन $x = +a$ या $x = -a$ तो $\frac{dx}{dt} = 0$

समी० (5) से :-

$$0 + \omega^2 a^2 = A$$

$$\Rightarrow A = \omega^2 a^2$$

समी० (5) में A का मान रखने पर :-

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 a^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 a^2 - \omega^2 x^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\omega^2 (a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ — } (6)$$

$$\boxed{V = \omega \sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ — } (7) \quad \left[\because \frac{dx}{dt} = V\right]$$

समी० (7) सरल आवर्ती दोलित्र का वेग है।

समी० (6) से :-

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$$

⑥

समाकलन करने पर :-

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dt = \int \omega dt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \frac{x}{a} = \omega t + \phi \quad [\phi : \text{नियत}]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = a \sin(\omega t + \phi)} \quad -(8)$$

समी० (8) विस्थापन का समी० है।

किसी क्षण कण की गतिज ऊर्जा समी० (7) से:-

$$V = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} m v^2$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - x^2)} \quad -(9)$$

यदि कम्पन की कला 2π से गुजरती है तो विस्थापन पुनः प्रारम्भिक स्थिति हो जाती है।

समीकरण (8) में 2π जोड़ने पर :-

$$x = a \sin(\omega t + 2\pi + \phi)$$

$$x = a \sin \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega}\right) \quad -(10)$$

t प्रारम्भिक समय एवं $t + \frac{2\pi}{\omega}$ में दोलन करते हुए कण ω दुबारा अपने प्रारंभिक स्थिति में आ रहा है।

आवर्तकाल $T = \cancel{t} + \frac{2\pi}{\omega} - \cancel{t}$

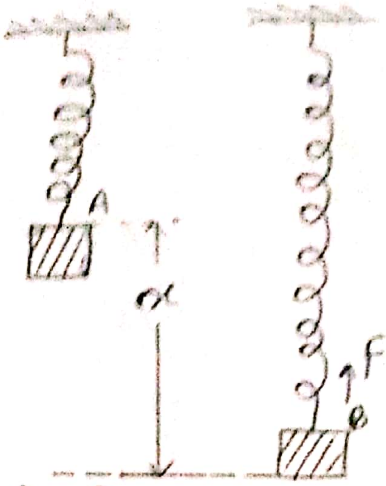
आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}} \quad -(11) \qquad \left[\because \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{c}}\right]$$

समी० (11) आवर्तकाल का समी० है।

सरल आवर्ती दोलनों के उदाहरण
(Examples of Simple Harmonic Oscillations) :-

(1) स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान की गति (Motion of a mass connected with a spring) :-



माना कि एक हल्की स्प्रिंग एक दृढ़ आधार से लटकी हुई है तथा इसके नीचे के सिरे पर m द्रव्यमान का एक वस्तु लटकी है। वस्तु की साम्य स्थिति A है। अब यदि वस्तु पर एक बल लगाया जाता है जिससे इसे नीचे की ओर स्थिति B तक खींचकर छोड़ देते हैं। जिससे वस्तु ऊपर-नीचे दोलन करने लगता है। वस्तु की स्थिति A से स्थिति B तक खींचने में किया गया कार्य, स्प्रिंग में प्रत्यानयन स्थितिज ऊर्जा के रूप में सञ्चित हो जाता है।

स्प्रिंग में एक विशेष गुण यह होता है कि यदि स्प्रिंग को दबाया या खींचा जाता है, तो उस पर एक प्रत्यानयन बल कार्य करने लगता है, जो उसे प्रारंभिक स्थिति में लाने की चेष्टा करता है।

∵ प्रत्यानयन बल, विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा इसकी दिशा, विस्थापन के विपरीत होती है। अर्थात

$$F \propto -x$$

$$\Rightarrow F = -Cx \quad \text{—— (1)}$$

(4)

माना किसी स्प्रिंग को x दूरी पर विस्थापित करके छोड़ने पर कण पर प्रत्यानयन बल कार्य करने लगता है जिसके कारण त्वरण उत्पन्न होगा।-

स्प्रिंग का त्वरण, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

यदि स्प्रिंग का द्रव्यमान m हो, तो:-

$F = ma$ — (2)

समी॰ (2) में a का मान रखने पर:-

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

F का मान समी॰ (1) में रखने पर:-

$$\Rightarrow \cancel{F} = \frac{md^2x}{dt^2} = -cx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{cx}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left[\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\right]$$

आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow T = 2\pi \times \frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \quad \text{— (3)}$$

तथा किसी क्षण t पर द्रव्यमान का विस्थापन

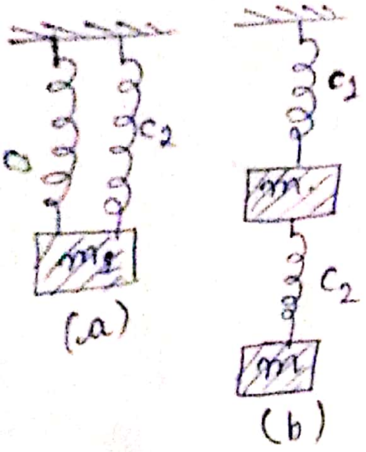
$x = a\sin(\omega t + \phi)$ होगा।

(विशेष परिस्थितियाँ) Special Case :- (i) यदि c बल नियतांक वाली स्प्रिंग को काटकर n बराबर टुकड़े कर दिये जाये, प्रत्येक टुकड़े का प्रभावी बल स्थिरांक nc हो जायेगा तब :-

एक टुकड़े से उसी द्रव्यमान m को लटकाने पर आवर्तकाल :-

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{nc}}} \longrightarrow (4)$$

(ii)



माना कि (a) व (b) में c_1 व c_2 बल नियतांक वाली दो स्प्रिंगें समान्तर क्रम में जुड़ी हुई है तथा इसमें m पिंड बंधा हुआ है।

माना द्रव्यमान m को इसकी साम्य स्थिति x दूरी विस्थापित करते हैं तो इस पर लगा कुल प्रत्यानयन बल

$$(-c_1 x) + (-c_2 x)$$

$$\Rightarrow F = -(c_1 + c_2)\,x \text{ होगा।}$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -(c_1 + c_2)\,x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-(c_1 + c_2)\,x}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{c_1 + c_2}{m}\right)x = 0 \qquad \left[\because \omega^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

आवर्तकाल $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(c_1 + c_2)}} \longrightarrow (5)$$

(5)

माना C_1 व C_2 दो स्प्रिंग श्रेणी क्रम में जुड़ी हुई हैं जिनसे m द्रव्यमान का पिंड बंधा हुआ है।

यदि पिंड को इसकी साम्य स्थिति से x दूरी विस्थापित करने पर एक स्प्रिंग में विस्थापन x_1 तथा दूसरी स्प्रिंग में विस्थापन x_2 होगा जहाँ

$$x = x_1 + x_2 \text{ है।}$$

तब पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल

$$F = -C_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{-F}{C_1}$$

$$F = -C_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{-F}{C_2}$$

चूँकि $x = x_1 + x_2$

x_1 व x_2 का मान रखने पर।-

$$\Rightarrow x = \frac{-F}{C_1} + \left(\frac{-F}{C_2}\right)$$

$$\Rightarrow x = -\left(\frac{F_1}{C_1} + \frac{F_2}{C_2}\right)$$

$$\Rightarrow x = -F\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\Rightarrow x = -F\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{F} = -\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F} = -\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)x$$

$$\Rightarrow F = -\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)x$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)x}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\left[\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)m}\right]x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\left[\omega^2 = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)m}\right]$$

आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(C_1 + C_2)m}{C_1 C_2}}$$

(8) सरल लोलक की गति (Motion of Simple Pendulum) :-

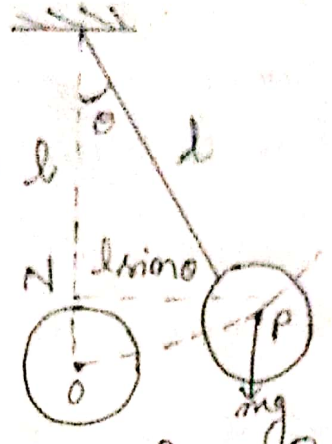


fig:- सरल लोलक की गति

यदि किसी पदार्थ के भारी से लेकिन बिंदु सदृश्य कण को m द्रव्यमान रहित लम्बाई में (l) में बढ़ने वाली, पूर्ण लचकदार रस्सी के एक सिरे से बाँधकर एक दृढ़ आधार से लटका दे, तो इसे सरल लोलक कहते हैं।

व्यवहार में, धातु के एक ठोस गोले को पतले एवं हल्के धागे से बाँधकर दृढ़ आधार से लटका कर सरल लोलक बनाया जाता है। धातु के गोले को गोलक कहते हैं।

माना कि लोलक की प्रभावी लंबाई l तथा गोलक का द्रव्यमान m है। किसी क्षण पर गोलक की विस्थापित स्थिति P पर लोलक का कोणीय विस्थापन θ है।

गोले के भार mg के कारण निलम्बन बिंदु S के परितः प्रत्यानयन बल आघूर्ण

$$\tau = -mgl\sin\theta \quad \text{— (1)}$$

गोले का निलम्बन बिन्दु S के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = ml^2 \quad \text{— (2)}$$

तथा जड़त्वीय बल आघूर्ण $\tau = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ — (3)

अतः लोलक की गति का समीकरण :-

(9)

$$\Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\sin\theta = 0 \qquad \left[\frac{g}{l} = \omega^2\right]$$

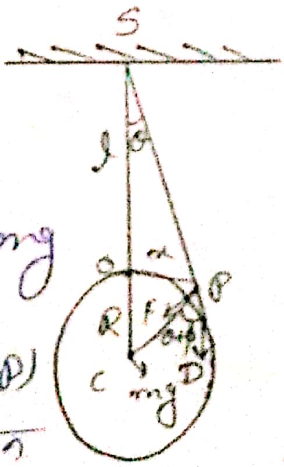
यदि θ कोण अल्प (small) हो तो :-

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \text{— (4)}$$

(आवर्तकाल) Timeperiod $= \frac{2\pi}{\omega}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{— (5)}$$

विशेष परिस्थिति :-



माना सरल लोलक की लम्बाई l है। जो पृथ्वी की त्रिज्या R के सापेक्ष नगण्य है। लोलक का भार mg पृथ्वी के केंद्र की ओर (PC)। कोणीय विस्थापन θ की स्थिति में (P) लोलक पर लगने वाला प्रत्यानयन बल : लोलक के भार mg (PC) का SP के लंबवत

प्रत्यानयन बल $F = mg\sin(\theta+\phi)$ (क्योंकि कोण अल्प

$= mg(\theta+\phi)$ — (6) ϕ अल्प है)

यदि लोलक का रेखीय विस्थापन OP = x हो

$\theta = \frac{x}{l}$

तथा $\phi = \frac{x}{R}$

समी० (6) में मान रखने पर:-

$\therefore F = mg\left(\frac{x}{l} + \frac{x}{R}\right)$

$\Rightarrow F = mgx\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{R}\right)$

$\Rightarrow F = mgx\left(\frac{R+l}{lR}\right)$ — (7)

अतः लोलक की गति का समीकरण निम्न होगा :-

$\Rightarrow \cancel{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -\cancel{m}gx\left(\frac{R+l}{lR}\right)$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -gx\left(\frac{R+l}{lR}\right)$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \left\{\frac{g(R+l)}{lR}\right\}x = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left[\because \frac{g(R+l)}{lR} = \omega^2\right]$

यह एक सरल आवर्त गति का समीकरण है :-

(आवर्तकाल) Timeperiod $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{lR}{g(R+l)}}$ — (8)